Análisis III. Parcial - 25 de octubre de 2018

La lectura correcta de los enunciados y la justificación de los procedimientos son condiciones necesarias para la resolución de los ejercicios

1. **a)** En qué se transforman, con la inversión, los puntos: $z = i$ y $z = \dfrac{1}{2}(\pm 1 + i)$? **b)** Hallar una función $u(x, y)$ que es armónica dentro de la circunferencia $C : \left\{|z - \frac{i}{2}| = \frac{1}{2}\right\}$, y con las condiciones de contorno <u>sobre</u> la circunferencia: sobre su mitad inferior, vale $u = 10$ y sobre la superior, $u = 5$ en la mitad derecha y $u = 20$ en la mitad izquierda.

2. **a)** Analice la convergencia de las siguientes integrales: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{\alpha x}}{1 + e^x} dx$ donde $\alpha = \frac{1}{2}$ y 3.
   Hint: *En caso de necesitarlo, se sugiere utilizar la sustitución:* $t = e^x$
   b) Calcule el valor principal de: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{cos(3x)}{1 + x^2} dx$ y justifique si le sirve para calcular el valor de la integral o no.

3. **a)** Determinar para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ la integral: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^\alpha \, dx}{1 + x^3}$ converge y justificar adecuadamente. **b)** Calcular, usando variable compleja, la integral para alguno de ellos ($\alpha \neq 0$).

4. **a)** Dada la función: $f(z) = \dfrac{z - 1}{z^2(z + 1)} + \dfrac{\pi}{z} e^{2/z}$, hallar la parte principal del desarrollo en potencias de z, válida en un entorno de $z = 0$, indicando su dominio de convergencia, para la función $f(z) = \dfrac{z - 1}{z^2(z + 1)} + \dfrac{\pi}{z} e^{2/z}$. **b)** ¿Qué tipo de singularidad tiene $f(z)$ en $z = 0$? ¿Cuánto vale Res($f(z)$,z=0)?

5. Considere la función: $F(x, y) = e^x \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2} \, cos(\epsilon y) - \dfrac{\alpha y}{x^2 + y^2} \, sen(\epsilon y) \right)$. **a)** ¿Existen valores de $\alpha, \epsilon \neq 0$ para los cuales $\nabla^2 F(x, y) = 0$? Y para que sea la parte real del potencial complejo de algún campo vectorial? Justificar adecuadamente y, de ser posible, halle dicho potencial, **b)** Indique cuáles son las curvas equipotenciales y las líneas de flujo y justifique el ángulo de intersección entre los dos tipos de curvas.